7. Énoncés des exercices

Exercice 7.1 Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes, et calculer l'expression de sa fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{4x^2+4x+1}$
3. $h : x \mapsto \sqrt{2x^2-3x-2}$

Exercice 7.2 Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes, et calculer l'expression de sa fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto \left(5x^3-4\right)^2$
2. $g : x \mapsto \left(5x^4-3x+2\right)^6$
3. $h : x \mapsto \left(\frac{1}{x+6}\right)^3$

Exercice 7.3 Donner l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions suivantes, et calculer l'expression de sa fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto (-7x+3)^5$
2. $g : x \mapsto \frac{4}{-5x+2} + \sqrt{x-7}$
3. $h : x \mapsto \frac{5}{3x-1} + \sqrt{2x+5}$

Exercice 7.4 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-3x^2+11x+4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f
2. Étudier les variations de la fonction f

Exercice 7.5 :

Première partie

On considère la fonction f définie sur $[0;4]$ par :

$$f(x) = \sqrt{x(4-x)}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;4[$ et donner l'expression de sa dérivée f' sur cet intervalle.
2. Démontrer que f n'est dérivable ni en 0 ni en 4.
3. Étudier les variations de la fonction f
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 2.

Deuxième partie

On considère la fonction g définie sur $[0;4]$ par :

$$g(x) = x\sqrt{x(4-x)}$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;4[$ et donner l'expression de sa dérivée g' sur cet intervalle.
2. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? En 4 ?
3. Étudier les variations de la fonction g
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0;3]$
   (b) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de cette solution à $0,01$ près
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 2

6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ et sa tangente au point d'abscisse 2 dans le même repère que la courbe de la fonction f (utiliser de la couleur ou des pointillés pour différencier les courbes).

Troisième partie

On considère la fonction k définie sur $]0;4]$ par :

$$k(x) = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier la limite de la fonction k en 0.
2. Démontrer que la fonction k est dérivable sur l'intervalle $]0;4[$ et donner l'expression de sa dérivée k' sur cet intervalle.
3. La fonction k est-elle dérivable en 4 ?
4. Étudier les variations de la fonction k
5. Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 2
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}_k$ et sa tangente au point d'abscisse 2, dans le même repère que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (utiliser de la couleur ou des pointillés pour différencier les courbes).

Exercice 7.6 Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour tout réel x de $[0;+\infty[$.

Exercice 7.7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, la dérivée f' de f et la dérivée seconde f'' de f.
   (b) Étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$
   (c) En déduire les variations de f'.
   (d) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.
   (e) En déduire le tableau de variations de f.
2. Soient $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.
   (a) En étudiant le signe de $f(x) - (x+1)$, préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{D}$.
   (b) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet en un point A une tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$. déterminer les coordonnées de A.

Exercice 7.8 Soient f, u et v les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad u(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad v(x) = \frac{3x-1}{x}$

1. Montrer que u et v sont des primitives de f sur $]0;+\infty[$
2. Simplifier $u(x) - v(x)$, et expliquer ce résultat.

Exercice 7.9 Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x\sin(x)$ et $F(x) = \sin(x) - x\cos(x)$

1. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$
2. Expliquer pourquoi la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 7.10 Soient F et f les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $F(x) = xe^{3x}$ et $f(x) = (1+3x)e^{3x}$.

1. Justifier que pour tout réel x : $F'(x) = f(x)$
2. Que peut-on en déduire pour la fonction F ?

Exercice 7.11 Soit f la fonction définie sur $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{2x-1}$$

1. Vérifier que f est sous la forme $\frac{u'}{u}$, où u est une fonction positive sur I dont on donnera l'expression.
2. En déduire une primitive de la fonction F sur I.

Exercice 7.12 Soit f la fonction définie sur $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

1. Écrire f sous la forme $k\frac{u'}{\sqrt{u}}$, où k est un réel et u une fonction à déterminer.
2. En déduire une primitive de f sur I.

Exercice 7.13 Déterminer la primitive de la fonction f sur l'intervalle I qui prend la valeur y_0 en $x_0 \in I$

1. $f(x) = \cos(3x)$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$
2. $f(x) = e^{4x} - x$, $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $y_0 = -2$